

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**СОГЛАСОВАНО**

Заведующий кафедрой

Кафедра математического  
анализа и дифф.уравнений  
(МАиДУ\_ФМиИ)

наименование кафедры

подпись, инициалы, фамилия

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

институт, реализующий ОП ВО

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой

Кафедра математического анализа  
и дифф.уравнений  
(МАиДУ\_ФМиИ)

наименование кафедры

Фроленков И.В.

подпись, инициалы, фамилия

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

институт, реализующий дисциплину

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА  
УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА**

Дисциплина Б1.В.ДВ.02.02.02 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА  
Уравнения Коши-Римана

Направление подготовки / 01.04.02 Прикладная математика и  
специальность информатика Магистерская программа  
01 04 02 01 Математическое моделирование

Направленность  
(профиль)

Форма обучения

очная

Год набора

2020

Красноярск 2021

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования с учетом профессиональных стандартов по укрупненной группе

010000 «МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

---

Направление подготовки /специальность (профиль/специализация)

Направление 01.04.02 Прикладная математика и информатика

---

Магистерская программа 01.04.02.01 Математическое моделирование

---

Программу  
составили

д.ф.-м.н., профессор, Кытманов Александр  
Мечиславович; к.ф.-м.н., доцент, Кузоватов  
Вячеслав Игоревич

---

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины

### 1.1 Цель преподавания дисциплины

Цель преподавания дисциплины «Уравнения Коши-Римана» - формирование твердых теоретических знаний и практических навыков, связанных с современными направлениями уравнений математической физики.

### 1.2 Задачи изучения дисциплины

Задачами дисциплины являются освоение методов решения задач дифференциальных уравнений, основанных на современных концепциях теории комплексного переменного, в том числе

- уравнений Коши-Римана,
- теории гармонических функций,
- краевых задач,
- задач комплексного потенциала,
- многомерных уравнений Коши-Римана,
- интегральных формул Бохнера-Мартинелли и Гартогса-Бохнера,
- теории голоморфных функций,
- аналитического продолжения,
- граничные аналоги теоремы Морера.

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

<b>ПК-1:Способен разрабатывать и исследовать математические модели, методы и алгоритмы по тематике проводимых исследований</b>	
Уровень 1	классические и современные методы прикладной математики и информатики в научно-исследовательской работе и при решении прикладных задач
Уровень 1	использовать рассмотренные методы в научной работе
Уровень 1	классическими и современными методами прикладной математики и информатики в научно-исследовательской работе и при решении прикладных задач, возникающих при решении задач математической физики

1.4 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Уравнения Коши-Римана» входит в вариативную часть Блока 1 «Дисциплины (модули)» образовательной программы.

Для изучения данной дисциплины студент должен обладать знаниями, полученными в ходе изучения следующих дисциплин программы бакалавриата:

Математический анализ

Алгебра

Аналитическая геометрия

Дифференциальные уравнения

Теория функций комплексного переменного

Функциональный анализ

Уравнения математической физики

Данная дисциплина является необходимой для прохождения практик, выполнения НИР и участия в научно-исследовательском семинаре.

1.5 Особенности реализации дисциплины

Язык реализации дисциплины Английский.

Дисциплина (модуль) реализуется без применения ЭО и ДОТ.

## 2. Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад.час)	Семестр
		3
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	<b>5 (180)</b>	<b>5 (180)</b>
<b>Контактная работа с преподавателем:</b>	<b>2,11 (76)</b>	<b>2,11 (76)</b>
занятия лекционного типа	2,11 (76)	2,11 (76)
занятия семинарского типа		
в том числе: семинары		
практические занятия		
практикумы		
лабораторные работы		
другие виды контактной работы		
в том числе: групповые консультации		
индивидуальные консультации		
иная внеаудиторная контактная работа:		
групповые занятия		
индивидуальные занятия		
<b>Самостоятельная работа обучающихся:</b>	<b>1,89 (68)</b>	<b>1,89 (68)</b>
изучение теоретического курса (ТО)		
расчетно-графические задания, задачи (РГЗ)		
реферат, эссе (Р)		
курсовое проектирование (КП)	Нет	Нет
курсовая работа (КР)	Нет	Нет
<b>Промежуточная аттестация (Экзамен)</b>	<b>1 (36)</b>	<b>1 (36)</b>

### 3 Содержание дисциплины (модуля)

#### 3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

№ п/п	Модули, темы (разделы) дисциплины	Занятия лекционного типа (акад. час)	Занятия семинарского типа		Самостоятельная работа, (акад. час)	Формируемые компетенции
			Семинары и/или Практические занятия (акад. час)	Лабораторные работы и/или Практикумы (акад. час)		
1	2	3	4	5	6	7
1	Уравнения Коши-Римана	38	0	0	34	ПК-1
2	Теоремы в продолжении	38	0	0	34	ПК-1
Всего		76	0	0	68	

#### 3.2 Занятия лекционного типа

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование занятий	Объем в акад. часах		
			Всего	в том числе, в инновационной форме	в том числе, в электронной форме
1	1	Лекция 1. Гармонические функции в $C^1$	4	0	0
2	1	Лекция 2. Формула Бохнера-Грина	12	0	0
3	1	Лекция 3. Формула Бохнера-Мартинелли	8	0	0
4	1	Лекция 4. Интеграл Бохнера-Мартинелли	6	0	0
5	1	Лекция 5. Оператор Ходжа	8	0	0
6	2	Лекция 6. Теорема Гартогса-Бохнера и ее следствия	8	0	0
7	2	Лекция 7. Функции, представимые интегралом Бохнера-Мартинелли	6	0	0

8	2	Лекция 8. Комплексная задача Неймана	8	0	0
9	2	Лекция 9. Функции с одномерным свойством голоморфного продолжения	8	0	0
10	2	Лекция 10. Граничные аналоги теоремы Морера	8	0	0
Всего			76	0	0

### 3.3 Занятия семинарского типа

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование занятий	Объем в acad. часах		
			Всего	в том числе, в инновационной форме	в том числе, в электронной форме
Всего					

### 3.4 Лабораторные занятия

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование занятий	Объем в acad. часах		
			Всего	в том числе, в инновационной форме	в том числе, в электронной форме
Всего					

## 4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Кытманов А. М., Кытманов А. А., Мысливец С. Г., Ходос О. В., Шлапунов А. А.	Интегральные представления и теория потоков (на английском языке): учебно-методический комплекс дисциплины [для студентов напр. подготовки 010300.68 "Математика и компьютерные науки", 010200.68 "Прикладная математика и информатика", 010100.68 "Математика"]	Красноярск: ИПК СФУ, 2008

## 5 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

**6 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

6.1. Основная литература			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Колмогоров А.Н., Фомин С.В.	Элементы теории функций и функционального анализа: учеб. пособие для студентов мат. спец. ун-тов	Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968
Л1.2	Худайберганов Г. Х., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А.	Комплексный анализ в матричных областях: монография	Красноярск: СФУ, 2011
Л1.3	Элияшев Ю. В., Цих А. К.	Когомологии дополнений к наборам координатных подпространств и интегральные представления голоморфных функций: автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук	Красноярск, 2013
Л1.4	Садыков Т. М., Цих А. К.	Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных	Москва: Наука, 2014
Л1.5	Куликов В. Р., Цих А. К.	Решение и формулы Варинга для системы $n$ алгебраических уравнений от $n$ неизвестных: автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук	Красноярск, 2014
Л1.6	Мышкина Е. К., Кытманов А. М.	О вычетных интегралах и степенных суммах корней систем неалгебраических уравнений $B \subset \mathbb{C}^n$ : автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук	Красноярск, 2015
Л1.7	Мысливец С. Г., Кытманов А. М.	Интегральные формулы с неголоморфными ядрами в задачах аналитического продолжения функций: диссертация ... доктора физико-математических наук	Красноярск: Б. и., 2000
Л1.8	Михалкин Е. Н., Цих А. К.	Аналитические аспекты теории алгебраических функций: автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук	Красноярск, 2016
Л1.9	Шабат Б.В.	Введение в комплексный анализ: учеб. для студ. унив-в	, 2004
Л1.10	Худайберганов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А.	Анализ в матричных областях: монография	Красноярск: СФУ, 2017
6.2. Дополнительная литература			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год



Л2.1	Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.	Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения	Новосибирск: Наука. Сибирское отделение [СО], 1990
Л2.2	Цих А. К.	Комплексный анализ и дифференциальные уравнения: межвузовский сборник	Красноярск: Красноярский университет [КрасГУ], 1996
Л2.3	Айзенберг Л. А., Кытманов А. М., Пономарев В. И.	Комплексный анализ и математическая физика: [сборник статей]	Красноярск: Институт физики СО АН СССР, 1988
Л2.4	Кацунова А. С., Кытманов А. М.	Главные значения некоторых многомерных сингулярных интегралов: дис. ... канд. физ.-мат. наук	Красноярск, 2011
Л2.5	Мысливец М. С., Кытманов А. М.	О голоморфном и плюригармоническом продолжении функций и распределений, заданных на гиперповерхности: диссертация... кандидата физико-математических наук	Красноярск: Б. и., 2004
<b>6.3. Методические разработки</b>			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Цих А. К., Антипова И. А., Бушуева Н. А., Ульверт Р. В.	Кратное интегрирование. Гомологии: электрон. учеб.-метод. комплекс дисциплины	Красноярск: ИПК СФУ, 2007
Л3.2	Цих А. К., Бушуева Н. А., Знаменская О. В., Антипова И. А., Шлапунов А. А.	Введение в специальность "Математика": электрон. учеб.-метод. комплекс	Красноярск: СФУ, 2008
Л3.3	Кытманов А. М., Кытманов А. А., Мысливец С. Г., Ходос О. В., Шлапунов А. А.	Интегральные представления и теория потоков (на английском языке): учебно-методический комплекс дисциплины [для студентов напр. подготовки 010300.68 "Математика и компьютерные науки", 010200.68 "Прикладная математика и информатика", 010100.68 "Математика"]	Красноярск: ИПК СФУ, 2008
Л3.4	Вайнштейн И.И., Кытманов А.А., Сидорова Т.В.	Математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Уравнение математической физики: метод. указания	Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005
Л3.5	Щуплев А. В., Цих А. К.	О вычетах в дополнениях к наборам координатных плоскостей в C-d: диссертация ... кандидата физико-математических наук	Красноярск: Б. и., 2005

## 7 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Э1	Электронная библиотека Сибирского федерального университета	<a href="http://bik.sfu-kras.ru/">http://bik.sfu-kras.ru/</a>
----	---	---

## 8 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для самостоятельного изучения теоретического материала используются учебники, учебные пособия и научные статьи, приведенные в списке литературы (п. 4.1). Общий объем самостоятельного изучения теоретического материала составляет 68 часов. В том числе по модулям:

Модуль 1. Уравнения Коши-Римана. Необходимо изучить:

1. Интегральное представление Бохнера-Грина и его следствия,
2. Интегральное представление Бохнера-Мартинелли и его следствия,
3. Интегральное представление Коши-Фантаппье и его следствия - интегральное представление Бергмана-Вейля, Андреотти-Норге,
4. Граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли, как обобщение граничных свойств интеграла Коши - формула Сохоцкого-Племеля и лемма Сохоцкого.
5. Теоремы о скачке, как аналоги теорем о скачке для интеграла типа Коши.
6. Интеграл Бохнера-Мартинелли в единичном шаре и его применения к нахождению собственных чисел и собственных функций интегрального оператора и его вычисление.
7. Проблема Коши для уравнения Коши-Римана - основная проблема многомерного комплексного анализа.

Модуль 2. Теоремы о продолжении. Необходимо изучить:

1. Различные формы записи условий Коши-Римана (дифференциальных и интегральных). Изучить понятие CR-функции.
2. Задача об аналитическом представлении для CR-функций, необходимые условия разрешимости, сравнение с теоремами о скачке для интеграла типа Коши.
3. Теорема об аналитическом представлении CR-функций и ее применение к вопросам аналитического продолжения функций.
4. Теорема Гартогса-Бохнера о продолжении – классический результат мно-гомерного комплексного анализа, отличающего его от комплексного анализа на плоскости.

5. Оператор Ходжа , произведение Ходжа, его свойства и его отличия в действительном и комплексном пространствах.

6. Граничная проблема Неймана , ее связь проблемой Коши-Римана, ее явное решение в некоторых областях многомерного комплексного пространства.

7. Голоморфность функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли, связь данного утверждения с однородной задачей Неймана и с теоремой о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли.

8. Функции с одномерным свойством голоморфного продолжения и результаты о голоморфном продолжении, как следствия теоремы о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли.

## **9 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю) (при необходимости)**

### **9.1 Перечень необходимого программного обеспечения**

9.1.1	Не требуется.
-------	---------------

### **9.2 Перечень необходимых информационных справочных систем**

9.2.1	Не требуется.
-------	---------------

## **10 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная доской.